Probabilité

1 Notion de hasard

1.1 Quelques problèmes d'introduction

A votre avis, quelle est la probabilité que dans un groupe de 30 personnes, deux personnes aient leur anniversaire le même jour de l'année ? Dans un groupe de 60 personnes ?
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000 euros et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quelles sont ses chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

1.2 Expérience aléatoire et événements

Au XVI^e siècle, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés et à faire plus que 10), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités (la physique et la mathématique) ?

Modéliser cette expérience aléatoire et proposer une explication à ce phénomène.

Lors de la *modélisation* d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :
- Un univers,
- Des parties de cet univers,
- Une loi de probabilité sur cet univers.

Définition :
- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne connait pas l'issue a priori, mais dont on peut prévoir le type.
- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**, **événement élémentaire** ou encore **issue**.
- L'ensemble de toutes les issues possibles *a priori* d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On a pour habitude de noter cet ensemble Ω.
- Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle **cardinal** son nombre d'éléments, noté $\text{Card}(\Omega)$ ou $\#\Omega$.
- Une partie de Ω est appelé **événement**. C'est un sous-ensemble constitué d'issues de l'univers.

Exemple :
- On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 2$
  Remarquons que rien n'empêche d'ajouter l'issue « Tranche » à cet univers. C'est l'énoncé qui définit l'univers. En l'absence d'indication, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.
- On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$ et $\#\Omega = 2$.
  On remarque que l'univers dépend de l'observation qui est faite.
- On lance deux dés et on fait le produit P des nombres obtenus :
  $\Omega_P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 19$.
  La partie $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ de l'univers est un événement qui peut se décrire par la phrase : « Obtenir un multiple de 6 ».

Exemple :
Il existe aussi des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :
— Choisir au hasard un entier naturel $\Omega = \mathbb{N}$ (ce type d'ensemble est dit *infini dénombrable*)
— Choisir au hasard un réel entre 0 et 1 : $\Omega = [0; 1]$ (*infini non dénombrable*)
— Choisir un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{Nombres premiers}\}$ (*infini dénombrable*)

Dans tout ce chapitre, on considère désormais expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ et $\text{Card}(\Omega) = n$.

1.3 Loi de probabilité

Définition : Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque éventualité $\omega_i \in \Omega$ un nombre $p_i \in [0; 1]$ de sorte que :
— $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$
— La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarques : Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i. On a $p_i = P(\omega_i)$. On a $P(\Omega) = 1$. Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$. L'univers peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit la loi P de telle sorte que leur probabilité soit nulle.

Loi des Grands Nombres :

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$.
Exemple : Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont données par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

Exemple : Dans le cas d'un dé parfaitement cubique, chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître et on choisira comme loi de probabilité celle qui a chaque éventualité associe le nombre $\frac{1}{6}$.
Considérons un dé où tous les nombres ont les mêmes chances d'apparitions sauf 1 et 2 qui apparaîssent deux fois plus souvent. La loi de probabilité convenant à cette expérience est telle que : $p_1 = p_2 = 2p_3 = 2p_4 = 2p_5 = 2p_6$
Notons $a = p_3$, alors $p_1 = 2a$. Comme $p_1 + ... + p_n = 1$ on a $2a + 2a + a + a + a + a = 1 \iff 8a = 1 \iff a = \frac{1}{8}$
Au final on peut résumer la loi de probabilité que l'on choisira pour modéliser cette expérience dans le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

1.4 Equiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie.

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple :

1. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.
   Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
   Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
2. On lance deux fois une pièce équilibrée et l'on note les faces obtenues.
   L'univers Ω est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\frac{1}{4}$.
   La probabilité de l'événement A « obtenir Pile et Face »= $\{PF; FP\}$ est donc $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   La probabilité de l'événement B « obtenir au plus une fois pile » $= \{FF, PF, FP\}$ est $P(B) = \frac{3}{4}$.

2 Probabilité d'événement

2.1 Base de la théorie des ensembles

Un ensemble se note avec des accolades. On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel. Par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

$$E = \{0; 2; 4; 6; 8\} = \{2; 8; 4; 6; 0\}$$

On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble :

$$2 \in E \qquad \text{et } 3 \notin E$$

Enfin nous noterons $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Exemple 1 : Une urne contient deux jetons rouges marquées R_1 et R_2 et deux jetons jaunes marquées J_2 et J_3.
On tire au hasard un premier jeton dans l'urne, puis, sans le remettre, on tire au hasard un deuxième jeton.
On note à chaque tirage la couleur et le numéro obtenu.

1. Quel est l'univers de cet expérience ?
2. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants, puis déterminer leur probabilité :
   — A :« Obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
   — B : « Obtenir deux jetons portant des numéros ayant un écart de 1 »
   — C : « Obtenir A et B »

Vocabulaire sur les ensembles :

$A \subset B$: A **est inclus dans** B **:** Tous les éléments de A sont inclus dans B.

$A \cap B$: **Intersection de** A **et** B **:** Eléments communs de A et B

$A \cup B$: **Réunion de** A **et** B **:** Eléments de A ou B (voire les deux)

$\overline{A}$: **Complémentaire de** A **dans** Ω **:** Eléments de Ω non dans A, noté aussi $\Omega - A$ ou $\Omega \setminus A$

$A \setminus B$: **Complémentaire de** B **dans** A **:** Eléments de A qui ne sont pas dans B

$A \cap B = \emptyset$: A **et** B **sont disjoints ou incompatibles** : Aucun élément commun à A et B

Exemple 2 : On considère les ensembles suivants :

— $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
— $A = \{2; 4; 6; 8\}$
— $B = \{1; 2; 3; 4; 7\}$

— $C = \{2; 6\}$
— D =« Tirer un roi (dans un jeu de cartes)
— E = « Tirer un coeur (dans un jeu de cartes) »
— F = « Tirer une figure (dans un jeu de cartes) »

Alors on a :

$C \subset A$
$D \subset F$
$A \cap B = \{2; 4\}$
$B \cap C = \emptyset$ donc B et C sont disjoints (ou incompatibles)
$D \cap E$ =« Tirer le roi de coeur »
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$
$A \cup C = A$
$D \cup E$ =« Tirer un coeur ou un roi (15 cartes) »
$\overline{A} = \{0; 1; 3; 5; 7\}$
$\overline{E}$ =« Tirer un pique, un carreau ou un trèfle »

Remarques : $\emptyset \subset A$ $\quad A \cup \overline{A} = \Omega$ $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$

2.2 Quelques propriétés

Propriété : Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Démonstration : Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des éléments de B. Puisque A et B sont disjoints, $A \cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A) + P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A \cup B$, i.e $P(A \cup B)$.

Propriété : Pour tous événements A et B de Ω on a :

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration : $1 = P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\emptyset) + 1$, d'où $P(\emptyset) = 0$.
$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ d'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\Big) + P\Big((B \setminus A) \cup (A \cap B)\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) + P\Big(A \cap B\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) \\
&= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\Big) \\
&= P(A \cup B)
\end{aligned}$$

D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 1 : Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à cordes, 20% jouent d'un instrument à vent et 5% jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes ou à vent ?

Exemple 2 : Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

Exemple 3 : Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,7$.
Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

Exemple 4 : Les résultats au bac 2009 ont battu des records de réussite, voici quelques chiffres :

Séries	**Effectifs des reçus**	**Effectifs des filles reçues**	**Taux de réussite**
Littéraire	47 765	37 878	87.1
Economique	90 466	56 994	88.5
Scientifique	148 531	69 810	89.6
Total	286 762	164 682	88.8

1. On édite le diplôme d'un bachelier (fille ou garçon) de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'un bachelier scientifique ?
2. On édite le diplôme d'un bachelier de la session 2009 de la série économique. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière ?
3. On édite le diplôme d'une bachelière de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière littéraire ?

Exemple 5 : On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »

1. Décrire $\bar{A}$ puis exprimer en fonction de n la probabilité $P(\bar{A})$
2. En déduire que $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$
3. Compléter le tableau suivant :

gain n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(A)$								

4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exemple 6 :
On souhaite répondre à la question suivante : dans une même classe, y a-t-il plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux élèves de la classe aient la même date d'anniversaire ?
On considérera une classe de 30 élèves et, pour simplifier, on dira qu'une année comporte 365 jours.

1. Combien existe-t-il de listes différentes contenant 30 dates d'anniversaire (identiques ou non) ?
2. Notons A l'événement « au moins deux élèves de la classe ont la même date d'anniversaire ».
   (a) Exprimer en français l'événement $\overline{A}$.
   (b) Quel est le nombre de cas favorables à $\overline{A}$?
   (c) Répondre à la question posée en début d'exercice.

3 Variable aléatoire

3.1 Définition

L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement Syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Définition : On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est à associer un réel x_i à chaque éventualité ω_i.

Remarque : Soit x_i le réel associé à l'issue ω_i de l'univers. On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Exemple : On lance trois pièces de monnaie, que l'on numérote 1 ; 2 et 3. Le jeu consiste à gagner 1 euro chaque fois que F apparaît et à perdre 1 euro chaque fois que P apparaît
La fonction X qui, à chaque issue, associe le gain (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.

Proposition (Admise) : La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $X(\Omega)$ dans $[0; 1]$, qui à chaque $x_i \in X(\Omega)$ associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques : Il s'agit bien d'une probabilité sur $X(\Omega)$.

On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_m	1

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3.2 Paramètres : espérance et variance

On reprend l'activité précédente sur les élèves de Syldavie.

Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et à sa régularité.
A Groland également, on a décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 5 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 0, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 15.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

Définition : L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i pi = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m$$

La variance de X est le nombre $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 pi = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + \cdots + [x_m - E(X)]^2 p_m$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :
-On a choisi d'utiliser les carrés pour la variance de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes, on aurait pu choisir une autre méthode.
La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.
-Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X, autrement dit, cela représente le risque du jeu.

Exemple : Dans l'exemple précédent et calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Interpréter vos résultats.
Mêmes questions pour les deux exemples de l'activité.

Propriété : La variance se calcule plus facilement grâce à la formule :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 pi - (E(X))^2$$

Remarque : On note encore $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{m} (x_1 - E(X))^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + (E(X))^2 \sum_{i=1}^{m} p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \times 1 \\
&= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$