Équations

I) Notion d'équation

A) Vocabulaire

Inconnue : c'est une lettre qui cache un nombre cherché :

Equation : c'est une égalité qui contient une inconnue. Par exemple : $10x - 2 = 2x + 3$

Résoudre une équation : c'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.

Solution : c'est le nombre caché sous l'inconnue. Ici, il s'agit de $x = 0,625$

Vérification : $10 \times 0,625 - 2 = 2 \times 0,625 + 3$, donc $0,625$ est solution.

Exercice : Vérifier si 14 est solution de l'équation $4(x - 2) = 3x + 6$.

Correction : $4(14 - 2) = 3 \times 14 + 6$
Oui, 14 est bien une solution.

B) Exemple concret

Une carte d'abonnement pour le cinéma coûte 10 euros. Avec cette carte, le prix d'une entrée est de 4 euros.

1. Calculer le prix à payer pour 2, 3, puis 10 entrées.
2. Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x le prix à payer en comptant l'abonnement.

Correction :

1. Pour 2 entrées : $10 + 2 \times 4 = 18$ euros.
   pour 3 entrées : $10 + 3 \times 4 = 22$ euros.
   pour 10 entrées : $10 + 10 \times 4 = 50$ euros.
2. $4x + 10$

II) Résolution d'équations

A) Introduction

Soit l'équation : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

Le but est de trouver la valeur de x, c'est-à-dire isoler x dans l'équation pour arriver à x =nombre

Les différents éléments d'une équation sont liés ensemble par des opérations.
Nous les désignerons ‶liens faibles ″(+ et −) et ‶liens forts ″(× et ÷). Ces derniers marquent en effet une priorité opératoire. Pour signifier que le lien est fort, le symbole ‶× ″peut être omis.

Dans l'équation ci-dessus, par exemple, $2x$ et $5x$ sont juxtaposés par le lien faible ``$-$ ''. Par contre, 2 et $x$ sont juxtaposés par un lien fort ``$\times$ ''qui est omis.

Dans l'équation $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$, on reconnaît des membres de la famille des x et des membres de la famille des nombres juxtaposés par des ``liens faibles ''.

Pour obtenir ``$x$ =nombre '', on considèrera que la famille des $x$ habite à gauche de la ``barrière=''et la famille des nombres habite à droite.

On sera ainsi menés à effectuer des mouvements d'un côté à l'autre de la ``barrière=''en suivant des règles différentes suivant que le lien est fort ou faible.

B) Avec ``lien faible ''

Le savant perse Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (Bagdad, 780-850) est à l'origine des méthodes appelées ``al jabr ''(=le reboutement; le mot est devenu ``algèbre''aujourd'hui) et ``al muqabala ''(=la réduction).

On lui doit :
-le mot et la notion d'algorithme, dérivé du nom de ce mathématicien persan
-le mot et la notion d'algèbre, dérivé du nom d'un de ses ouvrages
-l'invention du zéro (les mots chiffre et zéro sont issus du même mot arabe)
-la diffusion au Moyen-Orient et en Europe de la numération et des chiffres indiens, sous le nom de chiffres arabes.

Méthode de la ``balance '' : on enlève ou on ajoute la même chose de chaque côté du signe égal.

Exemple :

$2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$	
$7x - 4 = 6x + 2$	On réduit à gauche et à droite
$7x - 4 \quad \mathbf{+4} = 6x + 2 \quad \mathbf{+4}$	On ajoute la même quantité de chaque côté de l'égalité (ici 4)
$7x = 6x + 6$	On réduit
$7x \quad \mathbf{-6x} = 6x + 6 \quad \mathbf{-6x}$	On ajoute la même quantité de chaque côté de l'égalité (ici $-6x$)
$x = 6$	On réduit

C) Avec ``lien fort ''

Deux méthodes :

— Méthode de la ``balance ''. On multiplie ou on divise par le même nombre de chaque côté.
— Méthode ``moyen mnémotechnique ''(pas très usuel, voir les explications avec le professeur) :

$5 * 2 = 10$ $\qquad$ $5 = 10/2$ $\qquad$ $2 = 10/5$

Exemples :

$2x = 6$	$\dfrac{x}{-3} = 4$	$\dfrac{7}{9}x = -2$
$x = \dfrac{6}{2}$	$x = 4 \times (-3)$	$x = -2 \times \dfrac{9}{7}$
$x = 3$	$x = -12$	$x = \dfrac{-18}{7}$

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

a) $x - 3 = -16$
b) $-3 + x = 2$
c) $14x = 7$

Correction : a) $x = -13$ b) $x = 5$ c) $x = \dfrac{1}{2}$

III) Equations produits

Propriété :

$$\boxed{\text{Si } a \times b = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0.}$$

Autrement dit : Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$

On sait que : si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

$4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$4x = -6$ ou $-7x = -3$

$x = \dfrac{-6}{4}$ ou $x = \dfrac{-3}{-7}$

$x = \dfrac{-3}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{7}$

$S = \left\{\dfrac{-3}{2}; \dfrac{3}{7}\right\}$

IV) Résolution de problèmes faisant intervenir une équation

Problème (traité en classe) : Déterminer trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 465.

Choix de l'inconnue : soit n le premier des trois nombres cherchés.

Mise en équation du problème : $n + (n + 1) + (n + 2) = 465$.

Résolution de l'équation :

$3n + 3 = 465$
$3n = 465 - 3 = 462$
$n = 462 \div 3 = 154$

Solution : le premier nombre cherché est 154. Le deuxième nombre cherché est 155, et le troisième nombre est 156.

Vérification : on vérifie que la solution est cohérente : 154+155+156=465.