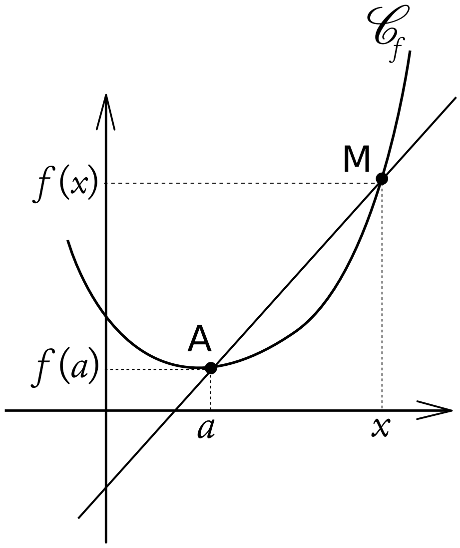
Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

1.1 Sécante à une courbe et taux d'accroissement

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a et x deux réels distincts de l'intervalle I. Soient deux points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ appartenant à $\mathscr{C}_f$.



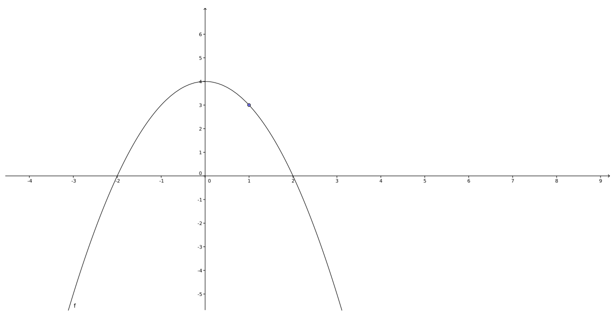
La sécante (AM) à $\mathscr{C}_f$ a donc pour coefficient directeur : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Ce nombre $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé **acroissement moyen** de f entre a et x.

Remarque importante : en posant $x = a + h$, on obtient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

En pratique, les deux formules de l'accroissement moyen sont importantes, on utilisera l'une ou l'autre selon le contexte.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.



Le taux d'accroissement entre 1 et $1 + h$ est : $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{-(1 + h)^2 + 4 - 3}{h} = \dfrac{-1 - 2h - h^2 + 1}{h} = \dfrac{-2h - h^2}{h} = -2 - h$.

1.2 Nombre dérivé

Intuitivement, lorsque le point M se rapproche de A, alors $1 + h$ devient de plus en plus proche de 1, et h devient de plus en plus proche de 0.
On dit alors que h tend vers 0.

Dans l'exemple précédent, lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2 - h$ se rapproche de -2. On note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2.$$

Définition : **Si** le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est **dérivable** en a.

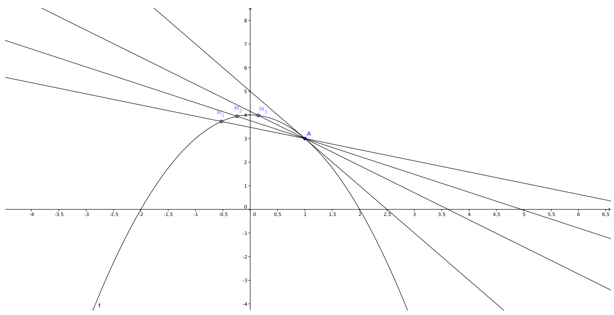
Ce nombre est alors appelé **nombre dérivé** de f en a. Dans ce cas, on le note$f'(a)$, autrement dit (lorsque la limite existe) on a :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$ est dérivable en 1, et on a $f'(1) = -2$.

1.3 Tangente à une courbe

Géométriquement, si l'abscisse x du point M tend vers l'abscisse a de A, alors le point M se rapproche de A, et le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers $f'(a)$.
Autrement dit, la droite (AM) se rapproche de plus en plus de la droite T passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Définition : On appelle **tangente à la courbe** $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a la droite passant par $A(a; f(a))$ et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$.

Le **nombre dérivé** est donc (lorsqu'il existe) le **coefficient directeur** de la tangente. On peut dans des cas simple le déterminer graphiquement.

Propriété : l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Démonstration :

Exemple : $f(x) = -x^2 + 4$. Trouver l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$.

2 Fonction dérivée

On a vu dans l'exemple précédent que $f'(1) = -2$. De même on peut calculer $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(4)$ etc. Il nous faut maintenant trouver un moyen plus rapide, une méthode plus générale afin de trouver les nombres dérivés d'une fonction.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=\frac{h(2a+h)}{h}=2a+h.$$

On trouve $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$. La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$. Ce résultat est valable pour tout nombre réel a. On dit dans ce cas que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on appelle **fonction dérivée** la fonction définie par $f'(x) = 2x$.

2.1 Définition

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est **dérivable sur l'intervalle** I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I la fonction notée f' définie par $x \mapsto f'(x)$.

Remarque : dire qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I siginifie donc qu'il existe des tangentes en tout point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

fonction f	dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = k$ avec k constante	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec n entier > 0	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$	$]-\infty;0[\cup]0,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec n entier > 0	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[\cup]0,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 1 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u'+v'$.

On note : $(u+v)'=u'+v'$.

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$. Alors $f = u+v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$ définies sur $]0;+\infty[$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$, et $\forall x \in]0;+\infty[$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{-1}{x^2}$.
Par suite, la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Propriété 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et $k \in \mathbb{R}$. Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est $k \times u'$.

On note : $(ku)'=k \times u'$.

Exemple : Soit $f(x) = 3x^3 - x^2 + x\sqrt{2} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque : par suite, toute fonction polynôme est dérivable sur son ensemble de définition.

Propriété 3 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u'v + uv'$.

On note : $(uv)'=u'v + uv'$.

Exemple : Soit $f(x) = x\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$. Alors f est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Par suite la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Propriété 4 : Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I, et telle que $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{-v'}{v^2}$.
On note : $(\frac{1}{v})'=\frac{-v'}{v^2}$.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ définie sur $]\frac{1}{3};+\infty[$. La fonction f est de la forme $\frac{1}{v}$ où $v(x) = 3x-1$.

La fonction v est dérivable sur $]\frac{1}{3};+\infty[$ et $v'(x)=3$. Par suite f est dérivable sur $]\frac{1}{3};+\infty[$ et $f'(x)=\frac{-3}{(3x-1)^2}$.

Propriété 5 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et telle que $\forall x\in I$, $v(x)\neq 0$.
Alors la fonction $(\frac{u}{v})$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
On note : $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple : Soit $f(x)=\frac{4x+5}{x-2}$ définie sur $]2;+\infty[$.

3 Applications de la dérivation

3.1 Dérivation et sens de variation

Théorème fondamental :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
-Si, pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
-Si, pour tout x de I, $f'(x)\leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.
-Si, pour tout x de I, $f'(x)=0$ alors f est constante sur I.

Remarques :
1. $f'(x)>0$ donne f *strictement croissante* sur I, etc.
2. Ce théorème nous permet donc d'étudier le sens de variation d'une fonction, en étudiant le **signe** de sa dérivée. Par ailleurs, dans certains cas cela n'est pas nécessaire (fonction de référence, polynôme du second degré, somme de deux fonctions, etc.).

Exemples :
1) Soit g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}-3x-1$. En posant $g=u+v$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=-3x-1$, on voit que cette fonction est la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc est elle même dérivable sur $]0;+\infty[$.
On a : $\forall x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-3$. De plus $g'(x)=0\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x=\frac{1}{36}$. On obtient alors :

x	0		$\frac{1}{36}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$\frac{-11}{12}$	$\searrow$	

Avec : $g(\frac{1}{36})=\sqrt{\frac{1}{36}}-3\times\frac{1}{36}-1=...=\frac{-11}{12}$.

Remarque : Si on regarde la représentation graphique de cette fonction à la calculatrice, la fonction semble (au premier abord) décroissante sur $]0, +\infty[$. Il faut donc se méfier de l'affichage rendu, et utiliser intelligemment le zoom de la calculatrice.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 + \dfrac{1}{2} \times 2x - 2 = x^2 + x - 2$.

Il faut déterminer le signe de $f'(x)$. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.

Le discriminant Δ est strictement positif, donc il y a deux racines au polynôme $x^2 + x - 2$.

On trouve $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$. On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{25}{3}$	$\searrow$	$\frac{23}{6}$	$\nearrow$	

Avec :

$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2)^3 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 5 = ... = \dfrac{25}{3}$.

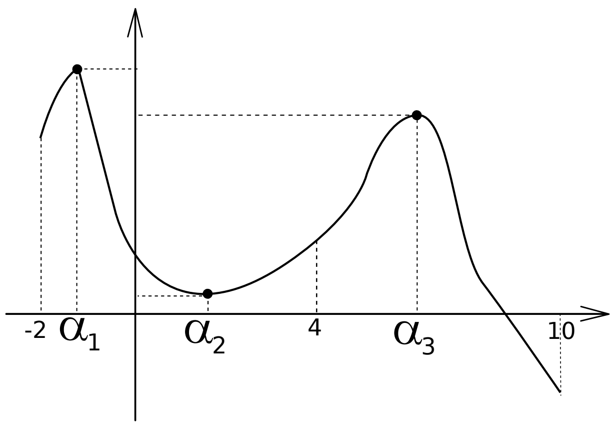
$f(1) = \frac{1}{3} \times (1)^3 + \frac{1}{2} \times (1)^2 - 2 \times 1 + 5 = ... = \dfrac{23}{6}$.

3.2 Extremum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\alpha \in I$. On dit que :

-f admet sur I un maximum local en α s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I tel que $\forall x \in]a; b[$, on a $f(x) \leqslant f(\alpha)$.

-f admet sur I un minimum local en α s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I tel que $\forall x \in]a; b[$, on a $f(x) \geqslant f(\alpha)$.



Exemple : sur l'exemple représenté, α_2 est un minimum local sur (par exemple) l'intervalle $] - 2; 4[$, en revanche ce n'est pas un minimum sur $] - 2; 10[$. De même α_3 est un maximum local sur (par exemple) l'intervalle $]4; 10[$, en revanche ce n'est pas un minimum sur $] - 2; 10[$. De plus α_1 est un maximum global sur l'intervalle $] - 2; 10[$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $\alpha \in I$. On a :

Si f admet en α un extremum local, alors $f(\alpha) = 0$.

Remarques :

1) La réciproque de cette propriété est fausse, par exemple la fonction $f(x) = x^3$ a pour dérivée la fonction $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0, mais cette fonction n'admet pas d'extremum en 0.

2) Lorsque f' s'annule et **change de signe** en un nombre réel $\alpha \in I$, alors la fonction admet un extremum en α.

3) Cette propriété sert donc à trouver d'éventuels candidats au poste d'extremum d'une fonction sur un intervalle donné.