Calcul littéral

I) Développer

A) Rappels : la distributivité simple

Règles :

$k(a+b) = ka + kb$	$k(a-b) = ka - kb$
$(a+b)k = ka + kb$	$(a-b)k = ka - kb$

Exercice 1 : Développer et simplifier si possible les expressions suivantes :

$A = 2(4+x)$
$B = -(5-x)$
$C = 4x(2+x)$
$D = 4x(2-x) - 4(3-2x)$

B) La double distributivité

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

Exercice 2 : Développer et simplifier si possible les expressions suivantes :

$E = (2+x)(4+y)$
$F = (3-2x)(5-x)$
$G = 4(4+x)(2+x)$
$H = 6x(1+x) - (5+4x)(3-2x)$

C) Cas particulier : une identité remarquable

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

Démonstration : $(a-b)(a+b) = a \times a + a \times b - a \times b - b \times b = a^2 - b^2$

Exercice 3 : Développer rapidement :

$I = (2+x)(2+x)$
$J = (4-y)(4+y)$

II) Factoriser

A) Retrouver les expressions factorisées

Exercice 4 : Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont déjà factorisées ?

$A = (2x + 1)(1 + x)$

$B = (x + 3) + (1 - 3x)$

$C = (x + 3)(1 - 3x)(1 - x)$

$D = (x + 3) \times 2$

$E = (4x - x^2)(5x + 3) + 9$

$F = (1 + 3x)(x - 2) + 1$

$G = 4x - 15$

$H = (2 + x)(x - 3)$

$I = (x - 1)^2$

$J = (4x - x^2)(5x + 3)$

$K = (x - 4) - 3(5 + 2x)$

$L = (6 + x)^2 - 4(2 + 3x)$

$M = (x + 6) + (x - 2)$

$N = x(x + 4)$

$O = 4 - x^2$

B) Factoriser avec un facteur commun

Pour factoriser, il faut trouver dans l'expression un **facteur commun**, c'est à dire un élément en commun.
Par exemple dans l'expression 4**a** + 6**a** − 8**a**, on voit facilement que l'élément en commun est a. On le souligne si besoin, afin de bien faire apparaître le facteur commun, puis on factorise :

$$\mathbf{a}(4 + 6 - 8)$$

On peut ensuite réduire l'expression, qui devient ici 2**a**.

Exercice 5 : Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible :

$K = 2x + 4x$ $\quad L = 6x - 6y + 12$ $\quad M = 3t - 9 + 6t$

$N = 5x^2 + 4x$ $\quad O = 6x^2 - 6yx + 12x$ $\quad P = 4x - x$

C) En appliquant une identité remarquable

On a vu précédemment que :

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Exercice 6 : Factoriser les expressions suivantes :

$A = 36 - x^2$ $\quad B = 16x^2 - 4$ $\quad C = 1 - 64x^2$

Correction :
$A = 36 - x^2 = 6^2 - x^2 = (6 + x)(6 - x)$
$B = 16x^2 - 4 = (4x)^2 - 2^2 = (4x - 2)(4x + 2)$
$C = 1 - 64x^2 = 1^2 - (8x)^2 = (1 + 8x)(1 - 8x)$

III) Prouver ou réfuter un résultat

Conjecture 1 : La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de trois.

Une **conjecture** est une propriété mathématiques dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse.
Nous allons essayer de valider cette conjecture, ou réfuter cette conjecture.
-Si elle est vraie, il faut essayer de la démontrer, avec nos connaissances et nos compétences mathématiques.
-Si elle est fausse, on essaie de trouver un contre-exemple, c'est à dire un "moment" où cette propriété ne "fonctionne pas". On dira alors (si on y arrive) qu'elle est fausse.

Dans le cas de la conjecture 1, après avoir testé avec pas mal d'exemples, on a l'impression qu'elle est vraie.
1+2+3=6 et 6 est bien un multiple de 3.
2+3+4=9 et 9 est bien un multiple de 3.
3+4+5=12 et 12 est bien un multiple de 3.
4+5+6=15 et 15 est bien un multiple de 3.
Mais **méfiance**, parfois une conjecture semble vraie en testant un grand nombre de fois, mais elle n'est pas toujours vraie (il suffit de tomber sur un professeur de maths un peu taquin qui cherche à piéger ses élèves par exemple).

Notre intuition nous dit ici que la Conjecture 1 est vraie. Prouvons-le.
Si on appelle n notre premier nombre, alors le nombre suivant sera $n + 1$, et le suivant sera $n + 2$. La somme de ces trois nombres est donc $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$.
On factorise ensuite cette expression : $3n + 3 = 3(n + 1)$. Autrement dit, la somme de trois entiers consécutifs est de la forme "$3\times$ Bidule". C'est donc bien un multiple de 3, et la Conjecture 1 est (toujours) vraie.

Conjecture 2 : L'égalité suivante est-elle vraie ? $8x + 1 = 9$

Dans cet exemple, c'est assez facile de voir que la conjecture est fausse :

-Si $x = 1$, le membre de gauche vaut $8 \times 1 + 1 = 9$ et le membre de droite aussi (l'égalité est alors vérifiée).
-Si $x = 2$, le membre de gauche vaut 17 et le membre de droite vaut 9. L'égalité n'est donc pas vraie.

On a trouvé un "moment" où l'égalité proposée n'est pas vérifiée (il y en a en fait une infinité dans cet exemple). La conjecture est donc fausse.

<u>A savoir</u> : Soit n un nombre choisi.

Le nombre suivant n est $n + 1$.

Le nombre précédent n est $n - 1$.

Un nombre pair s'écrit toujours sous la forme $2n$.

Un nombre impair s'écrit toujours sous la forme $2n + 1$ ou $2n - 1$.

Un multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$, un multiple de 11 s'écrit sous la forme $11n$, etc.

Un nombre de trois chiffres peut s'écrire sous la forme $a \times 100 + b \times 10 + c$

(où a est le chiffre des centaines, b est le chiffre des dizaines et c celui des unités).