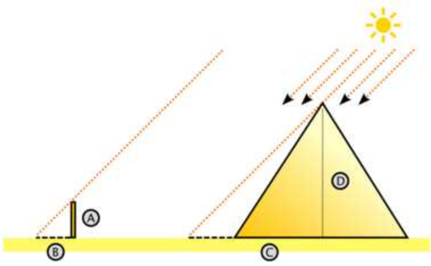
Théorème de Thalès et droites parallèles

I) Introduction

La légende raconte que lors d'un voyage en Égypte, Thalès de Milet (savant grec né à Milet vers -625 et mort vers -547 dans cette même ville) aurait visité les pyramides construites plusieurs siècles plus tôt. Admirant ces monuments, il aurait été mis au défi d'en calculer la hauteur. Thalès aurait donc entrepris une mesure des pyramides, dont le principe reposerait sur le concept de triangles semblables et de proportionnalité.

Thalès aurait remarqué qu'à cette époque de l'année, à midi, l'ombre portée d'un homme ou d'un bâton égalait la taille de l'homme ou la longueur du bâton. Les rayons de soleil pouvant être supposés parallèles, Thalès en aurait déduit qu'il en serait de même pour la hauteur de la pyramide et son ombre projetée.



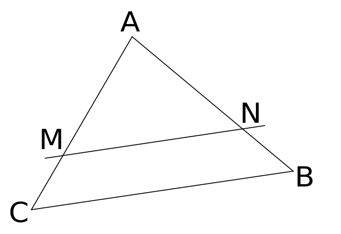
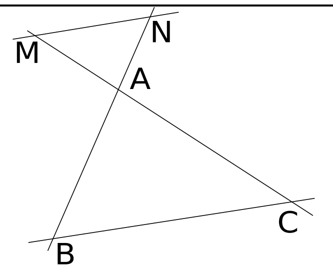
Ce principe de proportionnalité entre les côtés de triangles semblables est connu sous le nom de théorème de Thalès dans les pays de la Méditerranée et dans les pays de l'Europe de l'Est ou du Nord. Cependant en Allemagne, ce résultat est connu sous un autre nom (Strahlensatz, théorème des rayons), et autrement dans les pays de langue anglaise (intercept theorem, théorème d'interception).

Les premières traces d'une connaissance du théorème ou d'un substitut proche remontent au IIe millénaire av. J.-C., à l'âge du bronze, à la fois en Égypte antique et en Mésopotamie dans la civilisation babylonienne.

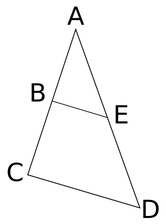
II) Calcul d'une longueur grâce au théorème de Thalès

Théorème de Thalès : Soient (BN) et (CM) deux droites sécantes en A. Si (MN) est parallèle à (BC) alors les longueurs des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est à dire :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

Configuration classique	Configuration papillon
	

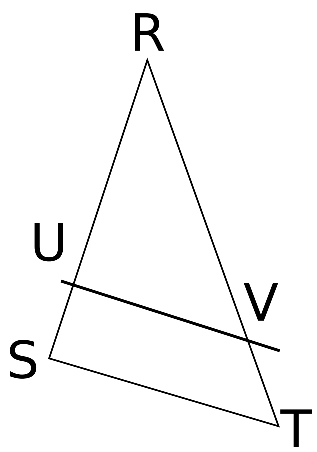
Exemple : Sur la figure suivante, on sait que les droites (BE) et (CD) sont parallèles et que $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm, $AE = 7$ cm et $BE = 4$ cm. Calculer la longueur CD en détaillant votre démarche.



III) Démontrer que des droites sont parallèles ou ne sont pas parallèles

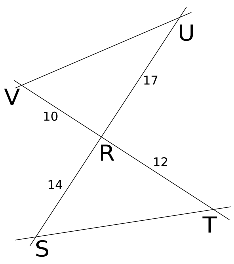
Réciproque du Théorème de Thalès : Soient (BN) et (CM) deux droites sécantes en A.
Si $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ et si les points A, M, C d'une part et A, N, B d'autre part sont alignés dans le même ordre, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple 1 : Soit la figure suivante, telle que $RU = 4$, $RS = 5$, $RV = 6$ et $RT = 7,5$. Démontrer que les droites (UV) et (ST) sont parallèles.



Correction :
-Les droites (US) et (VT) sont sécantes en R.
-Les points R, U, S et R, V, T sont alignés dans le même ordre.
-On calcule $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{4}{5} = 0,8$ et $\dfrac{RV}{RT} = \dfrac{6}{7,5} = 0,8$. On a donc $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{RV}{RT}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (UV) et (ST) sont parallèles.

Exemple 2 : Soit la figure suivante, telle que $RV = 10$, $RT = 12$, $RU = 17$ et $RS = 14$. Démontrer que les droites (UV) et (ST) ne sont pas parallèles.



Correction :
-Les droites (US) et (VT) sont sécantes en R.
-Les points U, R, S et V, R, T sont alignés dans le même ordre.
-On calcule $\dfrac{RV}{RT} = \dfrac{10}{12}$ et $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{17}{14}$. On a $\dfrac{RV}{RT} \neq \dfrac{RU}{RS}$.

Les quotients ne sont pas égaux, donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (UV) et (ST) ne sont pas parallèles.