Divisibilité et nombres premiers

I – Rappels

A) Division Euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** de deux nombres entiers, c'est trouver deux nombres entiers, le quotient et le reste, qui vérifient l'égalité :

dividende = diviseur × quotient entier + reste

On note aussi : $a = b \times q + r$ avec $r < b$

Exemple :

942	24
-72	39
222	
-216	
6	

936 = 24 × 39 + 6
942 est appelé le dividende, 24 le diviseur
39 est appelé le quotient (entier) et 6 le reste
On a bien 6 < 24

B) Multiples et diviseurs

Définition : on considère deux nombres entiers positifs a et b (avec b non nul).
Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul (r = 0), on dit que b est un **diviseur** de a (ou que b divise a). On dit que a est un **multiple** de b.

Exemples :
6 = 3 × 2 donc 2 et 3 sont des diviseurs de 6.
9 = 3 × 3 donc 3 est un diviseur de 9 et 9 est un multiple de 3.

Remarques :
1 est un diviseur de tous les nombres (c'est le diviseur universel).
Tout nombre entier non nul est un diviseur de 0.
Tout nombre entier non nul se divise lui même.

II – Critères de divisibilité

Propriétés :
-Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).
-Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
-Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.
-Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
-Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples :

5454 est divisible par 9 car 5 + 4 + 5 + 4 = 18 et 18 est un multiple de 9.
1221 est divisible par 3 car 1 + 2 + 2 + 1 = 6 et 6 est un multiple de 3.

Propriété : un nombre comportant deux chiffres ou plus est divisible par 4 si le nombre composé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4.

Exemples :
420 est divisible par 4 car 20 est divisible par 4. En effet 20 = 4 × 5.
1053 n'est pas divisible par 4 car 53 n'est pas un multiple de 4.
1 356 478 232 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4. En effet 32 = 4 × 8.

Méthode pour trouver tous les diviseurs d'un nombre (méthode longue) : on veut trouver tous les diviseurs de 294 par exemple.
On teste avec les nombres 1, 2, 3, 4 etc. et on s'arrête lorsque qu'il y a une "inversion" entre le dividende et le diviseur (le dividende devient plus petit que le diviseur). Dans l'exemple ci-dessous, nous n'avons écrit que les diviseurs qui "fonctionnent".

$$\begin{array}{r|l} 294 & 294 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \cline{2-2} & 147 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 3 \\ \cline{2-2} & 98 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 6 \\ \cline{2-2} & 49 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 7 \\ \cline{2-2} & 42 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 14 \\ \cline{2-2} & 21 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 294 & 21 \\ \cline{2-2} & 14 \end{array}$$

Les diviseurs de 294 sont donc : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 98, 147, 294.

Exercice : Trouver tous les diviseurs de 28.

III – Nombres premiers

A) Définition

Définition : Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Exemple : 3 est un nombre premier car les seuls diviseurs de 3 sont : 1 et 3.

On peut ainsi faire une liste des nombres premiers. Cette liste est infinie.

Liste des nombres premiers jusqu'à 30 :

2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 - 29

B) Décomposition

Propriété : Tout nombre premier supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Exemples :

27 = 3 × 3 × 3

10 = 2 × 5

4 = 2 × 2

Méthode pour trouver la décomposition en produit de facteurs premiers :

$$294 \;\begin{array}{|l} 2 \\ \hline 147 \end{array} \qquad 147 \;\begin{array}{|l} 3 \\ \hline 49 \end{array} \qquad 49 \;\begin{array}{|l} 7 \\ \hline 7 \end{array}$$

Ainsi on trouve comme décomposition : 249= 2 × 3 × 7 × 7

Remarque : cette décomposition en produit de facteurs premiers est bien pratique, par exemple pour simplifier une fraction (et la rendre irréductible).

Exemples :

$$\frac{21}{9}=\frac{3\times7}{3\times3}=\frac{7}{3} \qquad \frac{270}{90}=\frac{3\times3\times3\times2\times5}{3\times3\times5\times2}=3$$