Les vecteurs

Activité préparatoire : exercices Chingatome.

1 Notion de vecteur

1.1 Notion de vecteur

Définition : Soient A et B deux points du plan. La translation est une transformation du plan, qui transforme A en B. De même, elle associe à tout point C du plan l'unique point D tel que les segments $[BC]$ et $[AD]$ ont le même milieu.

Deux cas se présentent :
1) $C \notin (AB)$. Dans ce cas $ABCD$ est un parallélogramme.
2) $C \in (AB)$. Dans ce cas, les points A, B, C et D sont alignés, et $ABCD$ est un parallélogramme applati.

La translation qui transforme ainsi A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Vecteurs égaux

Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui à C associe D.
Alors à tout point M du plan, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{CD}$ associent le même point N du plan.

Définition : Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que la translation qui transforme A en B associe au point C le point D.
On note alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Remarque : avec une autre définition de vecteur, on dit que ces deux vecteurs ont le même sens, la même direction, et la même "longueur".

Propriété : Deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux sisi le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement applati).

Dans le cas de deux vecteurs égaux, on dit qu'ils sont le représentant d'un même vecteur (noté $\overrightarrow{u}$ par exemple.

Cas particuliers : vecteur nul, et vecteur opposé + dessin.

2 Coordonnées d'un vecteur

Soit un repère $(O; I; J)$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur donné.
La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ associe au point O (origine) un unique point M. On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$

Définition : Dans ce repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M.

Exemple : soit $\overrightarrow{u}$ la transformation transformant le point $O(0; 0)$ en le point $M(3; 2)$. Alors on notera $\overrightarrow{u}(3; 2)$.

Notation : notera le repère $(O; I; J)$ par $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ etc.

Propriété : Deux vecteurs sont égaux sisi ils ont les même coordonnées dans un repère donné.

Exemples : $\overrightarrow{u}(4; 1)$ et $\overrightarrow{v}(4; 2)$ ne sont pas égaux.

2.1 Coordonnées du vecteur AB

Propriété : Soit un repère donné, et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Démonstration à faire en classe : Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. Donc I le milieu du parallélogramme $ABMO$. On a donc $x_I = \dfrac{x_O + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_O + y_B}{2}$. De même $x_I = \dfrac{x_A + x_M}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_M}{2}$. On résoud ce système et on démontre ainsi la propriété.

3 Addition de vecteurs

3.1 Somme de vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et M un point. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ associe à M le poinr N. La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ associe à N le point P.
Alors la translation qui transforme M en P est dite translation de vecteur $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$.

Définition : La somme de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. Il s'agit en fait d'effectuer deux translations successives.

Propriété : Dans un repère, soient $\overrightarrow{u}(a;b)$ et $\overrightarrow{v}(c;d)$. Alors les coordonnées du vecteur sont $(a+c;b+d)$.

Démonstration à faire en classe.
Propriété : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a :
a) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$
b) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$
c) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$

3.2 Relation de Chasles

4 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition : Soit α un nombre réel et $\overrightarrow{u}(a;b)$ un vecteur dans un repère. Le vecteur $\alpha\times\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\alpha\overrightarrow{u};\alpha\overrightarrow{v})$.

4.1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

4.2 Vecteurs colinéaires

Définition : Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{u}=\alpha\times\overrightarrow{v}$.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Propriété : Trois points A, B et C sont alignés sisi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou confondues) sisi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.