Fonctions de référence et problèmes

1 La fonction carré

Définition : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Cette fonction est appelée fonction carré.

1.1 Sens de variation de la fonction carré

Propriété : la fonction $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

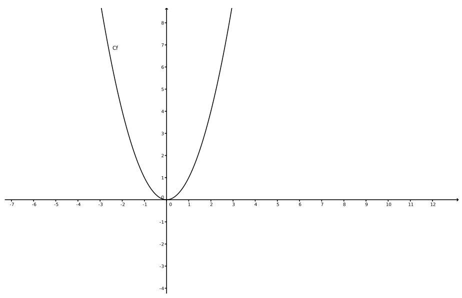
Démonstration : soient u, v deux nombres réels tels que $u \leqslant v$
a) Supposons u et v positifs (on étudie donc f sur $[0; +\infty[$).
On a alors : $f(u) - f(v) = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Or $u - v$ est négatif et $u + v$ est positif, donc $f(u) - f(v) \leqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
b) Supposons u et v négatifs. On arrive alors au résultat inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

1.2 Représentation graphique de la fonction carré

Définition : Dans un repère orthogonal d'origine O, le graphique de la fonction carré est appelée **parabole de sommet** O.

Propriété : Dans un repère orthogonal, la parabole P représentant la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Théorème :
a) Pour tous nombre réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $a < b \iff a^2 < b^2$ (les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images).
b) Pour tous nombre réels $a < 0$ et $b < 0$, on a : $a < b \iff a^2 > b^2$ (les nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images).

1.3 Fonctions polynômes du second degré

Définition : On appelle fonction polynôme du second degré (ou encore trinôme) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b, c des nombres réels tels que $a \neq 0$).

Exemples :

Représentations et sens de variations :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	m	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Remarques :

- Si $a > 0$: la parabole est orientée "vers le haut", le polynôme a alors un minimum m atteint pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $a < 0$: la parabole est orientée "vers le bas", le polynôme a alors un maximum M atteint pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Le sommet de la parabole est le point (noté souvent S) ayant pour abscisse $\dfrac{-b}{2a}$.
- La parabole est symétrique par rapport à la droit d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

1.4 Applications : comparaison de nombres et résolution d'inéquation

1. Comparer les nombres suivants :
   (a) $(-2,4)^2$ et $(-2,6)^2$
   (b) $-2,4^2$ et $-2,6^2$
   (c) $2,4^2$ et $2,6^2$
2. Résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 5$

2 Fonction inverse

Définition : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Cette fonction est appelée fonction inverse.

2.1 Sens de variation de la fonction inverse

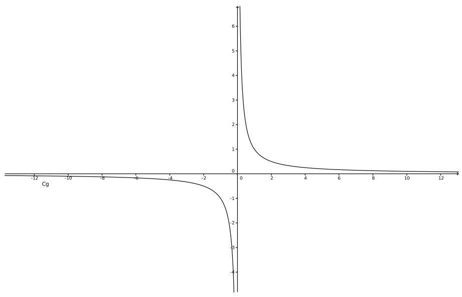
Propriété : la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

2.2 Représentation graphique de la fonction inverse

Définition : Dans un repère, la représentation graphique de la fonction carré est appelée **hyperbole**.

Propriété : Dans un repère d'origine O, l'hyperbole H représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine O.



2.3 Applications : comparaison de nombres et résolution d'inéquation

1. Comparer les nombres suivants :
   (a) $\dfrac{1}{-0,002}$ et $\dfrac{1}{-0,00019}$
   (b) $\dfrac{1}{\pi - 3}$ et $\dfrac{1}{0,21}$
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$

2.4 Fonctions homographiques

Définition : On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c, d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.
La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

Exercice : Résoudre l'équation $\dfrac{-5x+3}{2x+1} = 6$.