Equations de droites et problèmes

1 Rappels

1.1 Caractérisation analytique d'une droite

Propriété 1 : Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y = ax + b$ (avec a, b des réels) est une droite (appelée droite affine). Cas particulier : $y = ax$ (droite horizontale, parallèle à l'axe des abscisses).
De même, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $x = c$ (avec c un nombre réel) est une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées).

Propriété 2 : Inversement, dans un repère donné, toute droite d a une équation qui peut s'écrire de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$ avec a, b, c des nombres réels.

On a donc $y = ax + b$ où a est appelé coefficient directeur de la droite et b l'ordonnée à l'origine de la droite.

Exemples : Tracer les droites $D_1 : x = -2$; $D_2 : y = 3$ et $D_3 : y = -2x + 3$ en trouvant des points appartenant à ces droites.

1.2 Calcul du coefficient directeur

Propriété 3 : Soit un repère donné, et $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_B \neq x_A$. Alors le coefficient directeur de la droite passant par les points A et B est donné par : $a=\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration : la droite (AB) est de la forme $y = ax+b$ car non parallèle à l'axe des ordonnées (car $x_A \neq x_B$). On a donc $y_A = a\times x_A + b$ et $y_B = x_B + b$ d'où en résolvant le système $a=\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple : Déterminer l'équation de la droite passant par $A(2; -3)$ et $B(4; -5)$.

2 Droites parallèles et sécantes

2.1 Droites parallèles

Propriété 4 : Soit un repère donné, et $D_1 : y = ax + b$ et $D_2 : y = a'x + b'$. Alors :

D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, ie $a = a'$

Exemple : Soit $D_1 : y = 3x + 2$ et D_2 passant par les points $A(0; 3)$ et $B(2; 6)$.

2.2 Droites sécantes

Propriété 5 : Soit un repère donné, et $D_1 : y = ax + b$ et $D_2 : y = a'x + b'$. Alors :

D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si elles n'ont pas le même coefficient directeur, ie $a \neq a'$

Exemple : Soient $D_1 : y = 2x + 3$ et $D_2 : y = -5x + 3$. Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes, et trouver leur point d'intersection.

2.3 Points alignés

Propriété 6 : Soient A, B, C trois points deux à deux disctincts. Alors on a :

A, B, C alignés si et seulement si (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Exemples :
1) $A(1; -1)$, $B(3; 5)$ et $C(4; 8)$ alignés.
2) $A(1; 3)$, $B(3; 6)$ et $C(4; 8)$ pas alignés.