Trigonométrie

1 Rappels : cosinus et sinus d'un angle aigu

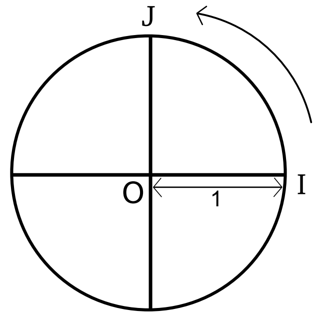
Soit ABC un triangle rectangle en B. On définit les nombre réels cosinus et sinus de l'angle $\widehat{BCA}$ par $cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC}$ et $sin(\widehat{BCA}) = \frac{AB}{AC}$.

De même on définit la tangente d'un angle aigu par : $tan(\widehat{BCA}) = \frac{AB}{BC}$.

2 Enroulement de la droite numérique

2.1 Cercle trigonométrique

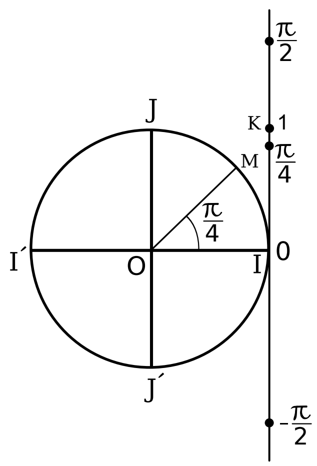
Définition : On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Un cercle trigonométrique est un cercle de centre O, de rayon 1 unité, que l'on muni d'un sens direct (le sens inverse des aiguilles d'une montre).



2.2 Enroulement de la droite numérique sur un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique de centre O. Le repère orthonormé $(O; I; J)$ est dit direct : sur le cercle $\mathscr{C}$, on se déplace de I vers J, selon le trajet le plus court, dans le sens direct.
Soit K le point de coordonnées $(1; 1)$. On munit la droite (IK) du repère $(I; K)$. La droite graduée ainsi formée représente la droite des réels ; on l'appelle **droite numérique**.

On "enroule" la droite (IK) sur le cercle $\mathscr{C}$. Ainsi tout réel x de la droite (IK) vient en un point M sur le cercle $\mathscr{C}$. On dit que M est l'image du réel x (sur l'exemple M est l'image du nombre réel $\frac{\pi}{4}$).



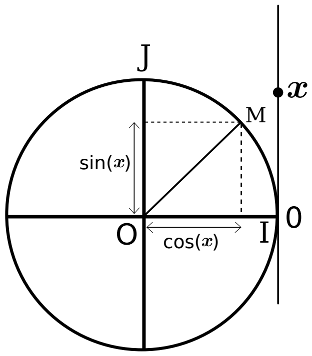
Exemples :
J est l'image du réel $\frac{\pi}{2}$, I' est l'image du réel π, J' est l'image du réel $\frac{-\pi}{2}$.

Propriété : Soient x et x' deux nombres réels de la droite numérique, tel que $x' = x + k \times 2\pi$ avec k un nombre entier relatif. Alors x et x' viennent d'appliquer sur un même point du cerlce $\mathscr{C}$.
De même, si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ image d'un nombre réel x, alors M est aussi le point image des nombres réels $x + k \times 2\pi$.

3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

3.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition : Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé direct, et $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique de centre O. Soit M est un point de $\mathscr{C}$, image du nombre réel x.
Le cosinus de x, noté $cos(x)$, est l'abscisse du point M. Le sinus de x, noté $sin(x)$, est l'ordonnée du point M.



Exemples :
-Le réel $\dfrac{\pi}{2}$ a pour image J sur le repère. J a pour coordonnées $(1; 0)$, donc $cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$ et $sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.
-De même, grâce au point I' de coordonnées $(-1; 0)$, on a $cos(-\pi) = -1$ et $sin(-\pi) = 0$.

Propriété : soit x un nombre réel compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M son image sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$cos(x) = cos(\widehat{IOM}) \text{ et } sin(x) = sin(\widehat{IOM})$$

3.2 Propriété

Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :
1) $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$

2) $-1 \leqslant sin(x) \leqslant 1$

3) $cos^2 x + sin^2 x = 1$

4) $cos(-x) = cos(x)$

5) $sin(-x) = -sin(x)$

6) $cos(x + 2\pi) = cos(x)$

7) $sin(x + 2\pi) = sin(x)$

3.3 Valeurs remarquables

Grâce à ce que l'on vient de voir, on peut en déduire certaines valeurs remarquables du cosinus et du sinus (prouvé en classe) :

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
$cosx$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1	1
$sinx$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0