Arithmétique

Le mot arithmétique vient du grec «arithmos» = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres.

I) Rappels

A) Division Euclidienne

On considère a et b deux nombres entiers positifs avec b non nul.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver le couple unique d'entiers positifs q et r vérifiant : $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

Exemple : Avec $a = 23$, $b = 7$ on trouve $q = 3$ et $r = 2$.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

23 est le **dividende**, 7 est le **diviseur**

3 est le **quotient** et 2 est le **reste**.

On a donc $23 = 7 \times 3 + 2$

B) Divisibilité

Vocabulaire : On sait que $21 = 7 \times 3$. On dit que 21 est un **multiple** de 7, et que 7 est un **diviseur** de 21.

Les multiples de 7 s'écrivent $7 \times k$ avec k un nombre entier (par exemple 0,7,14,21 sont des multiples de 7).

Remarques :
- 1 divise tous les nombres.
- Tout entier non nul est un diviseur de 0

Critères de divisibilité
-Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair.
-Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
-Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.
-Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
-Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

C) Méthode pour trouver tous les diviseurs d’un nombre (méthode longue)

On veut trouver tous les diviseurs de 294 par exemple.
On teste avec les nombres 1, 2, 3, 4 etc. et on s’arrête lorsque qu’il y a une “inversion” entre le dividende et le diviseur (le dividende devient plus petit que le diviseur). Dans l’exemple ci-dessous, nous n’avons écrit que les diviseurs qui “fonctionnent”.

$$\begin{array}{r|l} 294 & 1 \\ \cline{2-2} & 294 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \cline{2-2} & 147 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 3 \\ \cline{2-2} & 98 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 6 \\ \cline{2-2} & 49 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 7 \\ \cline{2-2} & 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 14 \\ \cline{2-2} & 21 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 21 \\ \cline{2-2} & 14 \end{array}$$

Les diviseurs de 294 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 98, 147, 294.

Exercice : Trouver tous les diviseurs de 30.

II) Nombres premiers

A) Définition

Définition : Un nombre est premier s’il possède exactement deux diviseurs positifs qui sont 1 et lui-même.

Nombres premiers à connaître par coeur	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

La liste des nombre premier est infinie (voir activité crible d’Eratosthène), seul les premiers sont à apprendre par coeur.

Propriété : Tout nombre premier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

B) Méthode pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \cline{2-2} & 147 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ \cline{2-2} & 49 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array}$$

La décomposition de 294 en produit de facteurs premiers est : $294 = 2 \times 3 \times 7 \times 7$

C) Diviseurs communs à deux entiers

Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Les **diviseurs communs** à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

III) Simplification de fractions

Pour rendre une fraction **irréductible**, on décompose son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers, puis on simplifie cette fraction par tous les facteurs communs.

Méthode : On veut simplifier la fraction $\frac{480}{420}$.

On commence par décomposer 480 et 420 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 480 & 2 \\ \cline{2-2} & 240 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ \cline{2-2} & 120 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ \cline{2-2} & 60 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \cline{2-2} & 30 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ \cline{2-2} & 15 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array}$$

Ainsi $480 = 2^5 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ \cline{2-2} & 210 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ \cline{2-2} & 105 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ \cline{2-2} & 35 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array}$$

Ainsi $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

On a donc $\frac{480}{420} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 2}{7} = \frac{8}{7}$.

Exercice : Mettre sous la forme irréductibles les fractions suivantes :

$$\frac{49}{21} \qquad \frac{450}{350} \qquad \frac{1326}{546}$$