Variables aléatoires

I) Définition et exemple compréhensible

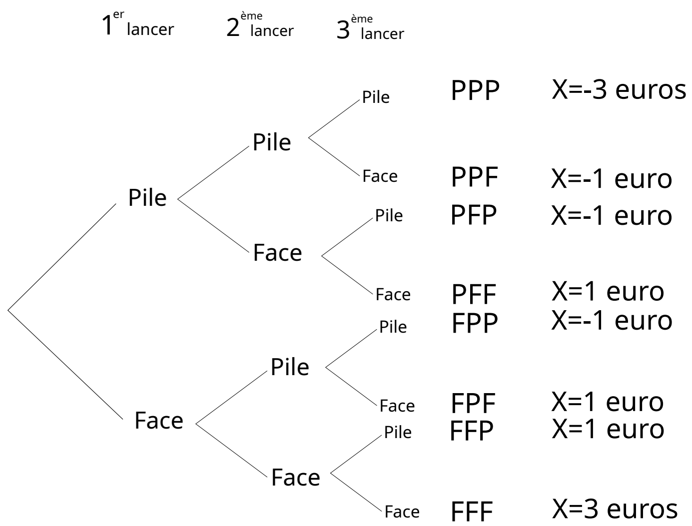
Définition : On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est associer un réel x_i à chaque éventualité ω_i.
On notera $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Proposition : La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $X(\Omega)$ dans $[0; 1]$, qui à chaque $x_i \in X(\Omega)$ associe le nombre $P(X = x_i)$ que l'on notera dans ce cours p_i.

On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_m	1

Exemple compréhensible : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Le jeu consiste à **gagner** 1 euro chaque fois que Face apparaît et à **perdre** 1 euro chaque fois que Pile apparaît.
La fonction X qui, à chaque issue, associe le **gain** final (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.
-Si on obtient 3 fois le côté Face, alors $X = 3$ (on a gagné 3 euros).
-Si on obtient 2 fois le côté Face et une fois le côté Pile, alors $X = 1$.
-Si on obtient 1 fois le côté Face et deux fois le côté Pile, alors $X = -1$.
-Si on obtient 3 fois le côté Pile, alors $X = 3$.



La loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

II) Espérance, variance et écart type

A) Formulaire

L'**espérance** mathématique de X est le nombre $E(X)$ définie par :

$$\boxed{E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_m \times x_m}$$

que l'on peut aussi écrire aussi $E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i pi.$
La **variance** de X sera dans ce cours calculée grâce à la formule :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 pi - (E(X))^2}$$

qui est parfois notée $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Remarque :
Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain **moyen** qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois.
Lorsque $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équilibré**.
L'écart type est une caractéristique de la **dispersion** des valeurs de X, autrement dit cela représente le **risque** du jeu.

B) Exemple simple

On reprend l'exemple précédent, la loi de probabilité du gain X était la suivante :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

L'espérance est : $E(x) = -3 \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0$. Le jeu est ici équilibré.
La variance est : $V(X) = (-3)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} - E(X)^2 = 9 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} - 0^2 = 3$.
L'écart type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3} \approx 1,73$.