Probabilités

I) Calcul de probabilités élémentaires

A) Rappels sur les ensembles

Un ensemble se note avec des accolades. On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel. Par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

$$E = \{0; 2; 4; 6; 8\} = \{2; 8; 4; 6; 0\}$$

On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble :

$$2 \in E \qquad \text{et } 3 \notin E$$

Enfin nous noterons $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Vocabulaire sur les ensembles :

$A \subset B$: A **est inclus dans** B **:** Tous les éléments de A sont inclus dans B.

$A \cap B$: **Intersection de** A **et** B **:** Eléments communs de A et B

$A \cup B$: **Réunion de** A **et** B **:** Eléments de A ou B (voire les deux)

$\overline{A}$: **Complémentaire de** A **dans** Ω **:** Eléments de Ω non dans A, noté aussi $\Omega - A$ ou $\Omega \setminus A$

$A \setminus B$: **Complémentaire de** B **dans** A **:** Eléments de A qui ne sont pas dans B

$A \cap B = \emptyset$: A **et** B **sont disjoints ou incompatibles** : Aucun élément commun à A et B

Exemple 1 : On considère les ensembles suivants :

— $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
— $A = \{2; 4; 6; 8\}$
— $B = \{1; 2; 3; 4; 7\}$
— $C = \{2; 6\}$
— D =« Tirer un roi » (dans un jeu de cartes)
— E = « Tirer un coeur » (dans un jeu de cartes)
— F = « Tirer une figure » (dans un jeu de cartes)

Alors on a :

$C \subset A$	$D \subset F$
$A \cap B = \{2; 4\}$	$B \cap C = \emptyset$ donc B et C sont disjoints (ou incompatibles)
$D \cap E =$« Tirer le roi de coeur »	$D \cup E =$« Tirer un coeur ou un roi » (15 cartes)
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$	$A \cup C = A$
$\overline{A} = \{0; 1; 3; 5; 7\}$	$\overline{E} =$« Tirer un pique, un carreau ou un trèfle »

Remarques : $\emptyset \subset A$ $\quad A \cup \overline{A} = \Omega$ $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$

B) Expérience aléatoire et événements

Définition :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne connait pas l'issue a priori, mais dont on peut prévoir le type.
- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**, **événement élémentaire** ou encore **issue**.
- L'ensemble de toutes les issues possibles *a priori* d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On a pour habitude de noter cet ensemble Ω.
- Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle **cardinal** son nombre d'éléments, noté $\text{Card}(\Omega)$ ou $\#\Omega$.
- Une partie de Ω est appelé **événement**. C'est un sous-ensemble constitué d'issues de l'univers.

Exemples 2 :

- On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 2$
  Remarquons que rien n'empêche d'ajouter l'issue « Tranche » à cet univers. C'est l'énoncé qui définit l'univers. En l'absence d'indication, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.
- On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$ et $\#\Omega = 2$.
  On remarque que l'univers dépend de l'observation qui est faite.
- On lance deux dés et on fait le produit P des nombres obtenus :
  $\Omega_P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 19$.
  La partie $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ de l'univers est un événement qui peut se décrire par la phrase : « Obtenir un multiple de 6 ».

Dans tout ce chapitre, on considère désormais une expérience aléatoire dans un univers fini $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ et $\text{Card}(\Omega) = n$.

C) Loi de probabilité

Définition : Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque éventualité $\omega_i \in \Omega$ un nombre $p_i \in [0; 1]$ de sorte que :

- $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarques : Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i. On a $p_i = P(\omega_i)$. On a $P(\Omega) = 1$. Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$. L'univers peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit la loi P de telle sorte que leur probabilité soit nulle.

Loi des Grands Nombres :

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$.

Exemple 3 : Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont données par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement C : « obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement D : « obtenir un nombre pair ».

Exemple 4 : Dans le cas d'un dé parfaitement cubique, chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître et on choisira comme loi de probabilité celle qui a chaque éventualité associe le nombre $\frac{1}{6}$.
$p_1 = p_2 = 2p_3 = 2p_4 = 2p_5 = 2p_6$
Notons $a = p_3$, alors $p_1 = 2a$. Comme $p_1 + ... + p_n = 1$ on a $2a + 2a + a + a + a + a = 1 \iff 8a = 1 \iff a = \frac{1}{8}$
Au final on peut résumer la loi de probabilité que l'on choisira pour modéliser cette expérience dans le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

D) Equiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie.

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple 5 :

1. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.
   Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
   Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

2. On lance deux fois une pièce équilibrée et l'on note les faces obtenues.
   L'univers Ω est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\dfrac{1}{4}$.
   La probabilité de l'événement A « obtenir Pile et Face »$= \{PF; FP\}$ est donc $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   La probabilité de l'événement B « obtenir au plus une fois pile » $= \{FF, PF, FP\}$ est $P(B) = \dfrac{3}{4}$.

E) Quelques propriétés

Propriété : Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriété : Pour tout événement A et B de Ω on a :

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

II) Probabilités conditionnelles

A) Exemple introductif

Un joueur tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

$F =$ « la carte tirée est une figure » et $R =$ « la carte tirée est un roi »

1. Calculer $P(F)$, $P(R)$ et $P(R \cap F)$.
2. Le joueur affirme : « la carte tirée est une figure ». Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

Solution :

1. Ici, l'univers Ω est constitué de 32 événements élémentaires équiprobables. On a donc :
   $$P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad ; \quad P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P(R \cap F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$
2. Ici on sait que l'on a tiré une figure, par conséquent les seules éventualités pour lesquelles la probabilité n'est pas nulle sont les douze figures. Notons P_F la probabilité sachant que nous avons tiré une figure, alors $P_F(F) = 1$ et $P_F(\overline{F}) = 0$. Ce calcul correspond au nombre de roi parmi les figures $card(R \cap F)$ que l'on divise par le nombre de figure $card(F)$, ainsi, comme il n'y a que douze figures et parmi elles 4 rois on a :
   $$P_F(R) = \frac{card(R \cap F)}{card(F)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
   La probabilité $P_F(R)$ s'appelle la probabilité (conditionnelle) de R sachant F.
   Nous remarquons que :
   $$\frac{P(R \cap F)}{P(F)} = \frac{4/32}{12/32} = \frac{4}{12} = P_F(R)$$

B) Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un univers et B est événement de probabilité non nulle.
La probabilité que l'événement A se réalise **sachant que B s'est réalisé** est $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice : Un élève sérieux de terminale a 80% de chance d'avoir son Bac au mois de juin. Pendant les grandes vacances qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves (bacheliers ou non) mais notre candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% sinon. Notons B l'événement "l'élève réussi son Bac" et A l'événement "l'élève est admis dans l'école".

1. Faire un arbre de probabilité modélisant l'expérience.
2. Quelle est la probabilité que l'élève réussisse son bac et soit admis à son école ?

C) Événements indépendants

Définition : deux événements A et B sont dits indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

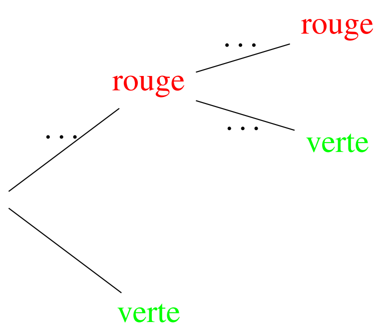
En reprenant les notations précédentes, cela revient donc à dire que $P_B(A) = P(A)$. La probabilité que A se réalise est alors la même, sachant que B est réalisé ou non. Autrement dit, l'événement B n'a pas d'influence sur l'événement A (et inversement).

III) Application aux arbres de probabilités

Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Compléter l'arbre suivant, qui modélise l'expérience (chemins et probabilités correspondantes).
2) Calculer les probabilité des événements suivants :

- A = « Tirer deux boules rouges »
- B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
- C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
- D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
- E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
- F = « Tirer deux boules de la même couleur »
- G = « Tirer au moins une boule verte »



Méthode :
Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.
Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant à cet événement.