Corrections des exercices Dénombrement

Exercice 1

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3		
Allemand			6	16
Total	12		15	

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, sur la première ligne de la colonne "Chimie", on peut facilement inscrire le chiffre 9. On obtient donc

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 2

a. Au 4eme tirage, elle aura au moins 2 chaussettes de la même couleur.

b. Au 9eme tirage, elle aura au moins 2 chaussettes de couleurs différentes.

Exercice 3

1. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à $20 \times 19 \times 18 = 6840$.
2. Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18.
3. Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de $3 \times 19 \times 18$.
4. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

Exercice 4

1. Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc 7^4 façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.
2. On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités. La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc $7 \times 6 \times 5 \times 4$.
3. On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc $7^4 - 7$.

Exercice 5

1. Il y a $\binom{8}{2}$ choix possibles, car on choisit deux éléments parmi 8. Il y a donc 28 choix possibles.

2. Il y a $\binom{4}{1}$ choix possibles pour une botte gauche, et autant pour une botte droite.

Le nombre total de choix formant une paire est donc $\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}=16.$

Exercice 6

1.

1.1. Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.

1.2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.

1.3. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

1.4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

2.

2.1. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.

2.2. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.

2.3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Exercice 7

Un anagramme correspond à une mutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot ! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombre de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

Pour le mot MATHS : il y a 5 ! possibilités.

Pour le mot RIRE, comme la lettre R se répète deux fois, il y a $\frac{4!}{2!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}=12$ possibilités.

Pour le mot ANANAS :
-Comme la lettre A se répète trois fois, il y a 3 ! possibilités pour placer ce A.
-Comme la lettre N se répète deux fois, il y a 2 ! possibilités pour placer ce N.
Il y a donc $\frac{6!}{3!\times2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=60$ possibilités.

Exercice 8

1. On choisit 4 cartes parmi 52 possible. Il y a donc $\binom{8}{2}$ choix possibles.

2. Il y a 4 choix pour la couleur. Une fois la couleur choisie, il suffit de choisir la plus haute carte de la main : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 5 et l'as. Il y a donc 10 choix possibles pou la hauteur de la plus haute carte, et donc $4\times10=40$ mains conduisant à une quinte flush.

3. Il y a 13 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (le carré d'as, le carré de rois, etc.).
Une fois cette hauteur fixée, il faut choisir une carte parmi les 48 autres pour compléter la main. Il y a donc $13\times48=624$ mains contenant un carré.

4. On choisit d'abord la hauteur des trois cartes de la même valeur : il y a 13 choix possibles.
On choisit alors ces 3 cartes de la même valeurs. Il y a $\binom{4}{3}=4$ choix possibles (car il y a trois cartes à choisir identique, parmi 4 couleurs différentes).
On choisit ensuite la hauteur des deux autres cartes. Il reste 12 choix de cartes. Puis on choisit ces 2 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{2}=6$ choix.
Finalement, le nombre de mains constituant un full est : $13\times4\times12\times6=3744$

Exercice 9

On va raisonner par différence. Si l'on ne met pas de contraintes, il y a 5!=120 façons de placer les gens autour de la table. Comptons maintenant le nombre de façons où Denis et Émilie sont côte à côte. On commence par choisir la position de ce couple. Il y a cinq positions possibles : (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) et (5,1). Cette position fixée, il y a 2!=2 choix pour placer Denis et Émilie, puis 3!=6 choix pour placer les autres. Il y a donc 5*2*6=60 dispositions où Denis et Émilie sont côte à côte. Finalement, il y a 120-60=60 dispositions où Émilie et Denis ne sont pas côte à côte!
Remarquons que ce raisonnement dépend du fait que l'on a numéroté les places et donc que, implicitement, la position Adélie 1, Brigitte 2, Chafik 3, Denis 4 et Emilie 5 est différente de la position Adélie 2, Brigitte 3, Chafik 4, Denis 5 et Emilie 1, alors que dans ces deux configurations, tout le monde a le même voisin.