Dénombrement

I) p-listes (répétition possible)

Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est donc $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On veut construire un nombre de deux chiffres en tirant au hasard deux pièces, en suivant les règles suivantes :

1. Les pièces sont prises l'une après l'autre (**consécutivement**)
2. La première pièce est **remise** dans le sac (on peut donc avoir deux fois de suite la même pièce)

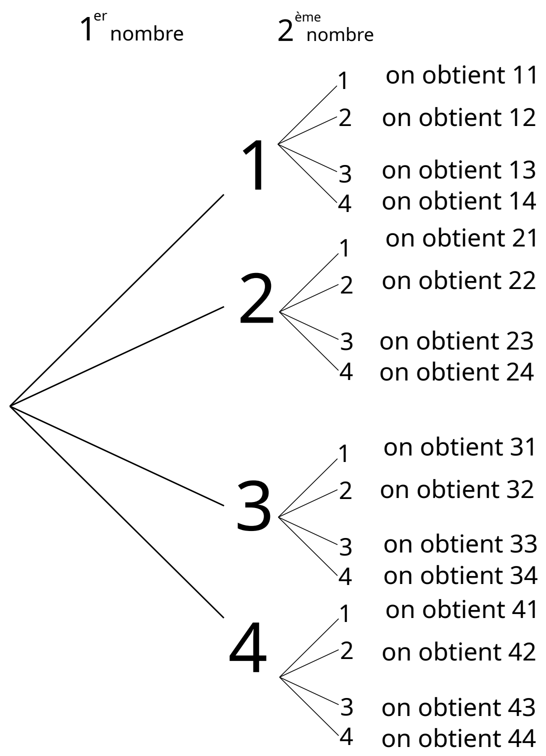
Combien de nombres peuvent ainsi être créés ?

On peut facilement lister les possibles, et on trouve comme issues :

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Chaque issue est une liste ordonnée (l'ordre a ici de l'importance, car par exemple $12 \neq 21$) autorisant la répétition. Les issues sont des p-listes (plus précisement des listes composées de 2 éléments).

On peut créer un arbre des possibles, qui a deux niveaux :



On voit bien sur cet exemple qu'il y a 16 possibilités, ce qui correspond aux 4 choix possibles de la première pièce multipliés par les 4 choix possibles de la deuxième pièce : $4 \times 4 = 4^2 = 16$.

Définition : Soit un ensemble E contenant n éléments. On note Card(E)=n.
Une p-listes d'éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E dans laquelle la répétition est autorisée.

Le nombre total de possibles p-listes issues d'un ensemble de n éléments est n^p.

II) Arrangements : p-listes sans répétitions

A) Factorielle d'un nombre entier

Factorielle : Soit n est un entier supérieur ou égal à 1. La factorielle d'un entier n, notée $n!$ désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à n :

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Par convention : $0! = 1$.

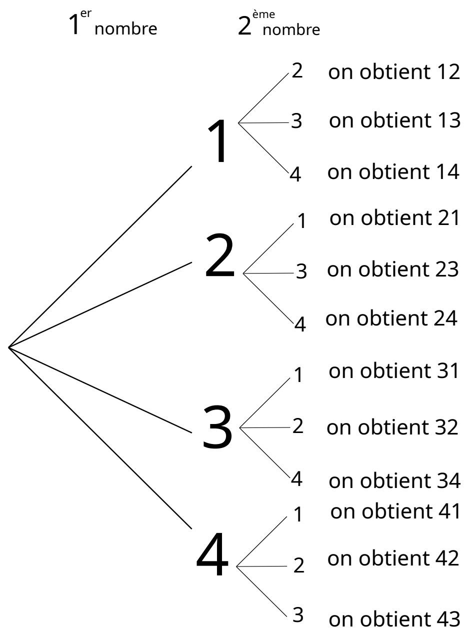
Exemples :
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$.

B) Arrangements

L'expérience est la suivante (légèrement différente que l'expérience vue précédemment) :
Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est donc $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On veut construire un nombre de deux chiffres en tirant au hasard deux pièces, en suivant les règles suivantes :

1. Les pièces sont prises l'une après l'autre (**consécutivement**)
2. La première pièce n'est pas remise dans le sac

On peut créer un arbre des possibles, qui a deux niveaux :



On voit que sur cet exemple qu'il y a 12 possibilités, ce qui correspond aux 4 possibilités pour le premier choix de pièce multiplié par les 3 choix de la deuxième pièce (on ne peut pas avoir deux fois la même pièce, les chiffres sont donc différents) : $4 \times 3 = 12$

<u>Définition</u> : Soit un ensemble E de n éléments, ainsi Card(E)=n.
Un **arrangement** de p éléments de E est une liste <u>ordonnée</u> de p éléments <u>différents</u> de E (il n'y a pas de répétition des éléments).
Le **nombre d'arrangements** de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté A_n^p.

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$$

Nombre de choix pour le premier élément

Nombre de choix pour le deuxième élément

Nombre de choix pour le p-ième élément

Le nombre de possibles arrangements de p éléments issus d'un ensemble de n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Sur l'exemple précédent par exemple, $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$.

C) Cas particulier d'arrangement : Arrangement de p éléments dans un ensemble de p éléments (Permutation)

Combien d'arrangements de p éléments peut-on former à partir d'un ensemble de p éléments ?

$$A_p^p = \frac{p!}{(p-p)!} = \frac{p!}{1} = p!$$

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, quels sont les arrangements des trois éléments de E ? Il n'y a pas de répétition, on parle ici d'arrangement.
On peut faire la liste des arrangements à trois éléments :

$$\begin{array}{ccc} (a,b,c) & (a,c,b) & (b,a,c) \\ (b,c,a) & (c,a,b) & (c,b,a) \end{array}$$

On retrouve bien les 6 possibilités, ce qui correspond à $A_3^3 = 3! = 6$.

On vient de ranger trois éléments dans un ensemble E contenant lui même trois éléments. C'est un cas particulier d'arrangement, appelé **permutation**.
Plus généralement : un arrangement de n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé une **permutation** des éléments de E.

Le nombre de permutations d'un ensemble de p éléments est $p!$

III) Combinaison

Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est donc $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

On tire deux pièces **simultanément** (en même temps).

Combien de tirages différents peut-on avoir ?

On note les résultats entre { }.
Il est important de bien comprendre que $\{1; 2\}$ et $\{2; 1\}$ représentent la même chose (ce sont des ensembles égaux), car on tire les pièces en même temps, il n'y a pas d'ordre des pièces.
On peut facilement lister les possibles, et on trouve comme issues : $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{1, 4\}$; $\{2, 3\}$; $\{2, 4\}$; $\{3, 4\}$.
On compte 6 issues différentes.

On ne peut pas représenter l'expérience sous forme d'arbre, car il n'y a pas de "premier nombre" et de "deuxième nombre" (les deux pièces étant tirées en même temps).

Le nombre de **combinaison** de k éléments parmi n sera noté $\binom{n}{k}$ ou encore C_n^k (ancienne notation française). Pour une combinaison, **l'ordre du choix ne compte pas**. Il est obtenu par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Dans notre exemple, on cherche le nombre de combinaison de 2 éléments parmi 4 éléments, c'est-à-dire que l'on cherche $\binom{4}{2}$. On obtient alors :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

.

Remarques :

-Dans la pratique, on utilisera souvent la calculatrice pour calculer les arrangements et les combinaisons.

-Il faut privilégier la notation $\binom{n}{k}$ par rapport à l'ancienne notation française C_n^k (on remarquera que la place du n et du k ne sont pas les mêmes avec cette notation).

-Pour comprendre le lien entre les arrangements et les combinaisons, voir la feuille "Différence entre combinaison et arrangement". On notera en particulier que $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$